

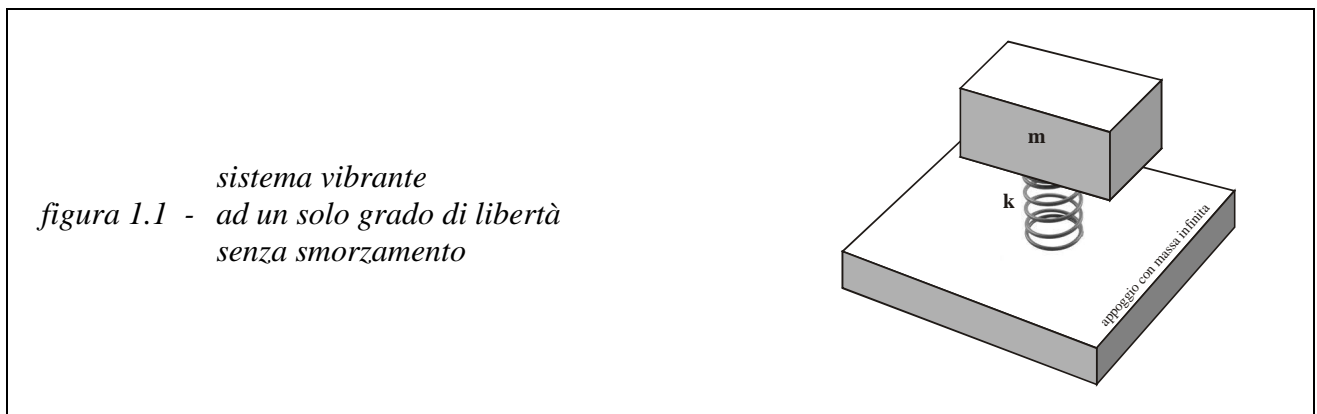
## 1 Nozioni di base del fenomeno vibratorio

I fenomeni vibratorii ed acustici hanno in comune il fatto che entrambi sono descritti come perturbazioni energetiche caratterizzate da una determinata ampiezza e ciclicità.

Nel caso del suono la perturbazione ciclica può essere osservata strumentalmente come variazione di pressione rispetto alla pressione atmosferica statica.

Nel caso delle vibrazioni la perturbazione è definita da spostamenti alternativi di un corpo, rispetto alla sua posizione di equilibrio statico.

Nella pratica esistono sistemi meccanici particolarmente complessi che richiedono studi specialistici per la loro schematizzazione ed analisi. Il più semplice sistema vibrante è costituito da una massa **m** e da una molla di rigidità **k** come nello schema della figura 1.1.



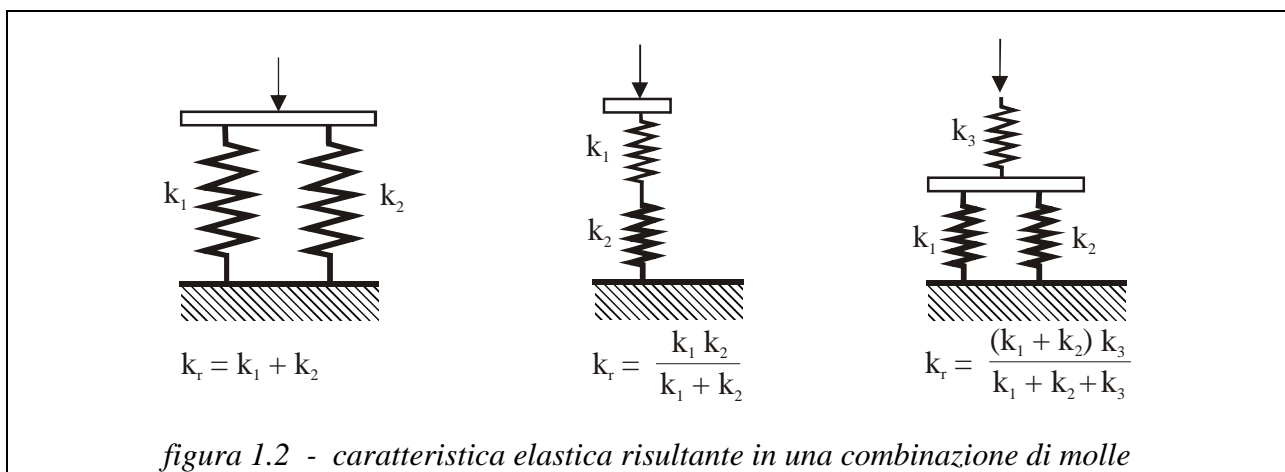
La massa ( $m$ ) e la caratteristica elastica della molla ( $k$ ) sono così esprimibili:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{\text{peso del corpo}}{\text{accelerazione di gravità}}$$

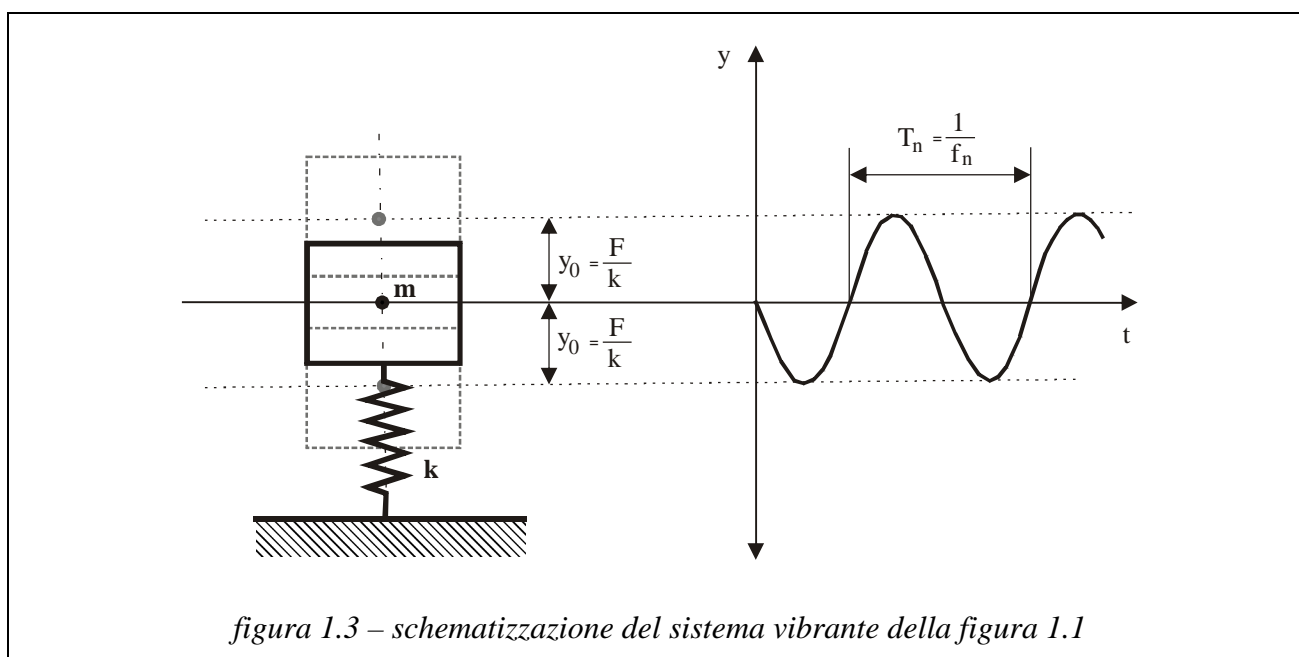
$$k = \frac{P}{s} = \frac{\text{carico statico applicato alla molla}}{\text{schacciamento legato al carico applicato}}$$

Per le molle più comuni in acciaio il rapporto tra carico applicato e schacciamento è proporzionale. Per le molle in gomma la caratteristica elastica non risulta più perfettamente lineare.

Volendo determinare la caratteristica elastica risultante di una combinazione di molle è utile la schematizzazione riportata nella figura 1.2.



Il sistema della figura 1.1 è schematizzato nella figura 1.3.



Se si applica alla massa **m** una forza **F**, spostando il baricentro della massa di una quantità **y<sub>0</sub>**, nel momento in cui cessa l'applicazione della forza **F** la massa ritorna nella sua posizione di equilibrio e la supera raggiungendo una deformazione **y<sub>0</sub>** in senso opposto. Si genera così un fenomeno vibratorio caratterizzato da un andamento sinusoidale.

Il sistema oscillerà con una determinata **frequenza propria** che è una proprietà intrinseca del sistema dinamico e che è legata alla rigidità della molla ed alla massa secondo la relazione (1.1) nella quale la frequenza è espressa in cicli al secondo (**Hz**).

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{Hz}] \quad (1.1)$$

L'espressione della frequenza propria, nella quale le uniche variabili sono la rigidità **k** della molla e la massa **m**, è sempre valida indipendentemente dall'orientamento nello spazio del sistema.

Nel caso particolare in cui il sistema oscilli verticalmente, l'espressione (1.1) si semplifica nella forma (1.2) sicchè la frequenza propria è unicamente legata alla deformazione statica.

Si sottolinea la necessità che nei calcoli si presti molta attenzione che la massa, la rigidità e l'accelerazione siano espresse in unità coerenti.

$$f_n = \frac{15,77}{\sqrt{y_0}} \quad [\text{Hz}] \quad (1.2)$$

L'andamento della funzione espressa con la (1.2) è riportato nel grafico della figura 1.4

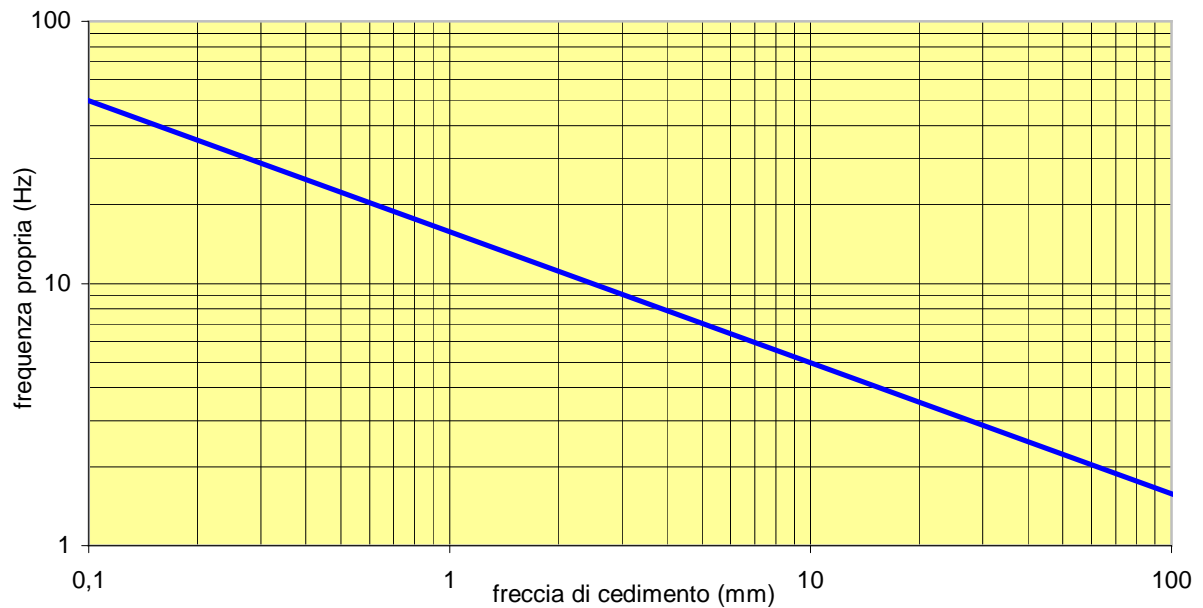


figura 1.4 – andamento della frequenza propria di una molla

Nella figura 1.5 sono sintetizzate le frequenze proprie di alcuni tipici sistemi dinamici espressi in cicli al secondo (Hz).

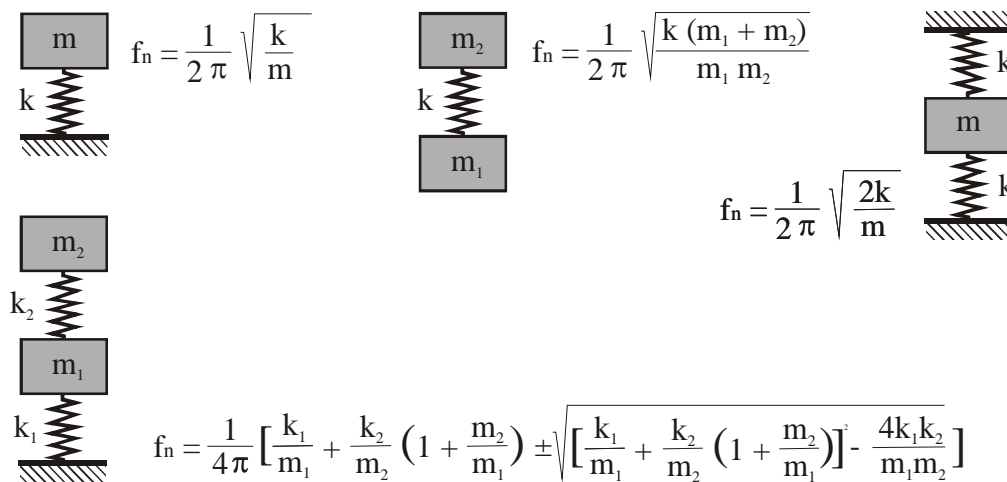


figura 1.5 - frequenze proprie di tipici sistemi dinamici

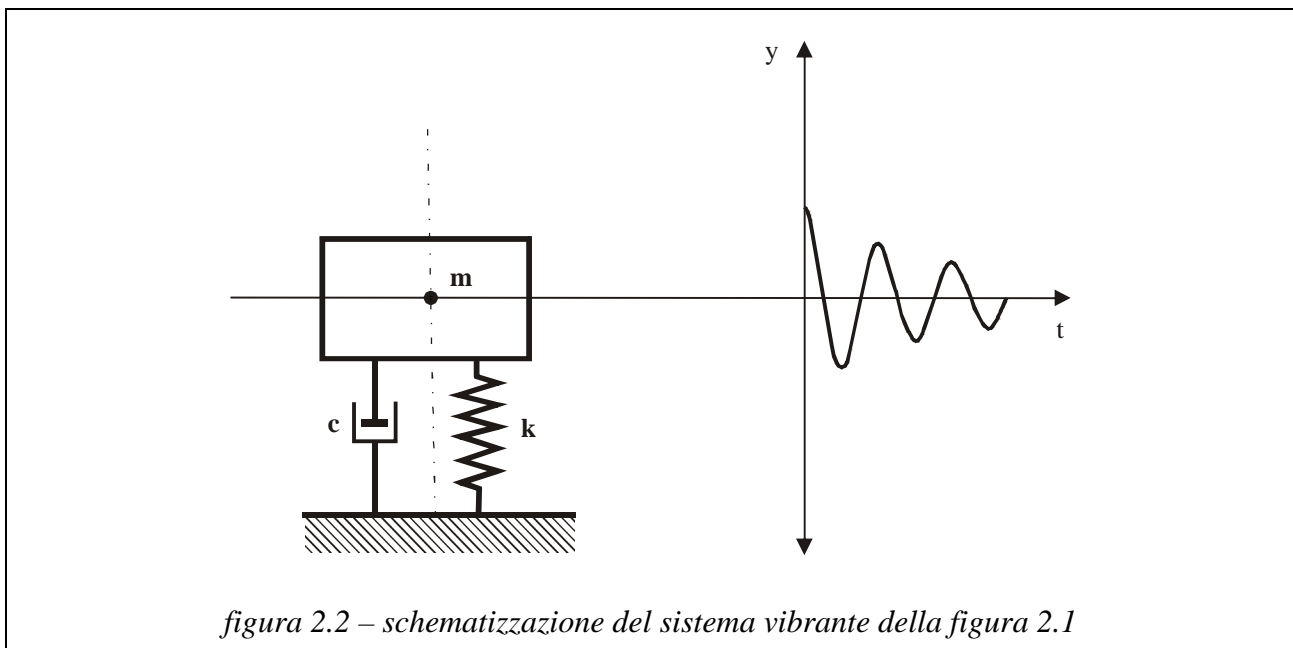
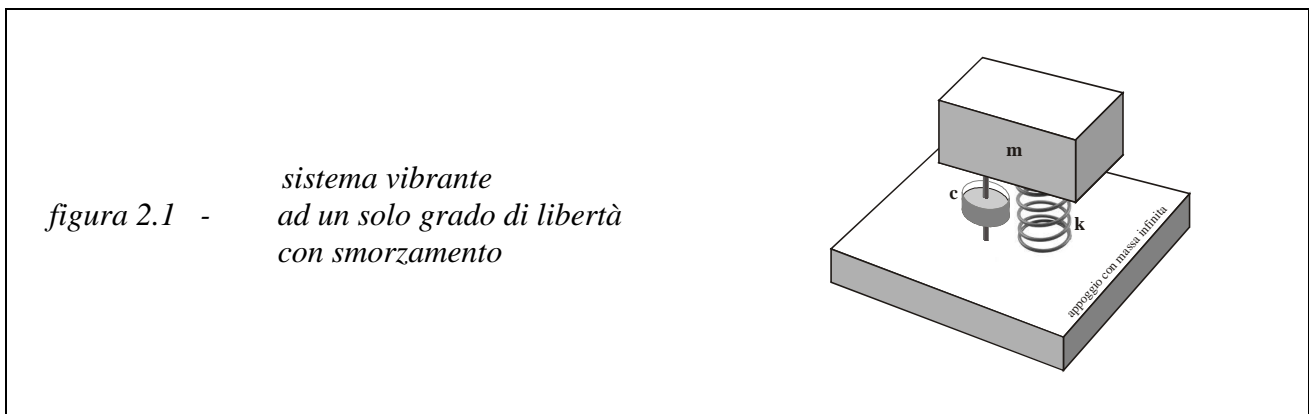
## 2 Oscillazioni smorzate

Analogamente a quanto avviene in ogni tipo di moto, nella pratica non è possibile prescindere dalle resistenze passive che riducono progressivamente le ampiezze di oscillazione.

Lo schema massa-molla della figura 1.1 va quindi integrato aggiungendo l'elemento con coefficiente di smorzamento  $c$  che rappresenta la resistenza dissipativa del sistema e che comporta la diminuzione dell'ampiezza di oscillazione nel tempo.

Va tenuto presente che lo smorzamento normalmente non incide significativamente sulla frequenza di oscillazione, a meno che il suo valore non sia rilevante, e che il coefficiente di smorzamento si considera di tipo viscoso, avente cioè la forza resistente proporzionale alla velocità del moto.

Nel caso delle oscillazioni smorzate, la situazione raffigurata nella figura 2.1 è schematizzata nella figura 2.2.



Con riferimento allo schema della figura 2.2, se, attraverso una forza esterna si sposta la massa  $m$  di una quantità  $y_0$ , e quindi si abbandona il sistema, chiamando  $y$  lo spostamento istantaneo della massa  $m$ , si può scrivere l'equazione di equilibrio istantaneo delle diverse forze agenti sul sistema.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (2.1)$$

L'equazione (2.1) è integrabile quando i coefficienti sono costanti, attraverso l'equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + \frac{c}{m} \alpha + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.2)$$

che fornisce la seguente soluzione:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

In generale le equazioni del moto si presentano nella forma di sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine e possono rappresentare moti periodici o aperiodici a seconda che l'espressione sotto radice della (2.3) sia minore o maggiore di zero. Il valore numerico di tale radice presenta pertanto una influenza importante nel comportamento del sistema smorzato.

Come grandezza di riferimento si definisce **smorzamento critico** ( $c_c$ ) il valore di  $c$  che riduce tale radicale a zero, ovvero

$$\frac{c_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n \quad c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

Lo smorzamento reale del sistema, che è definito **indice di smorzamento** ( $z$ ), è dato dal rapporto tra il coefficiente di smorzamento e lo smorzamento critico. Conseguentemente la quantità  $c/2m$  della (2.3) può essere espressa in funzione di  $z$

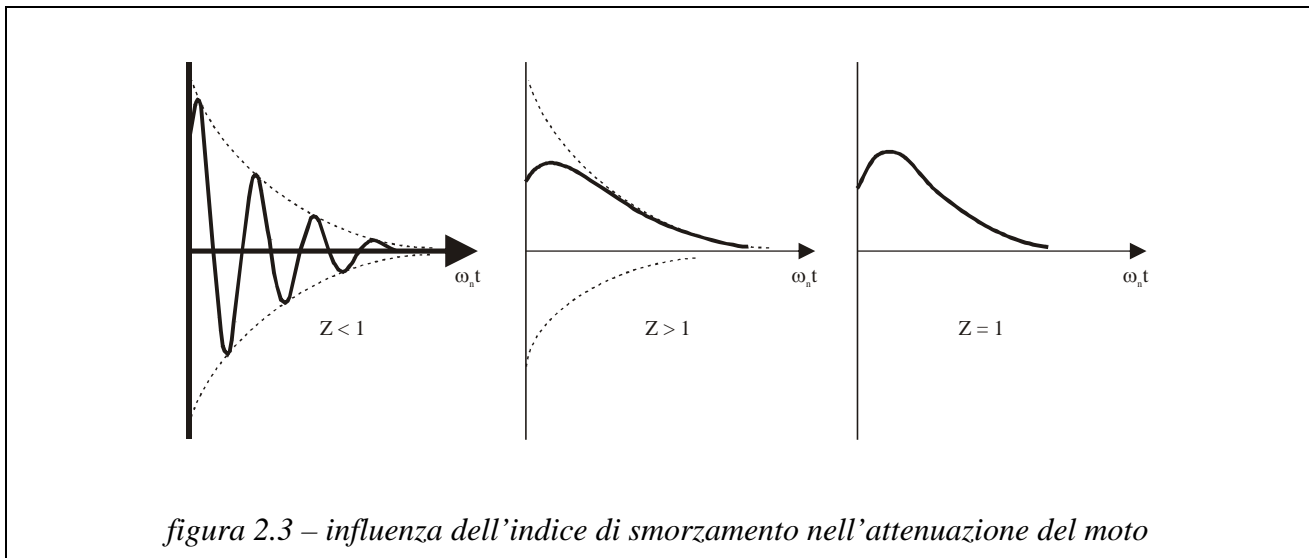
$$z = \frac{c}{c_c} \quad \frac{c}{2m} = z \frac{c_c}{2m} = z \omega_n$$

L'equazione (2.3) può pertanto assumere la seguente forma

$$\alpha_{1,2} = (-z \pm \sqrt{z^2 - 1}) \omega_n \quad (2.4)$$

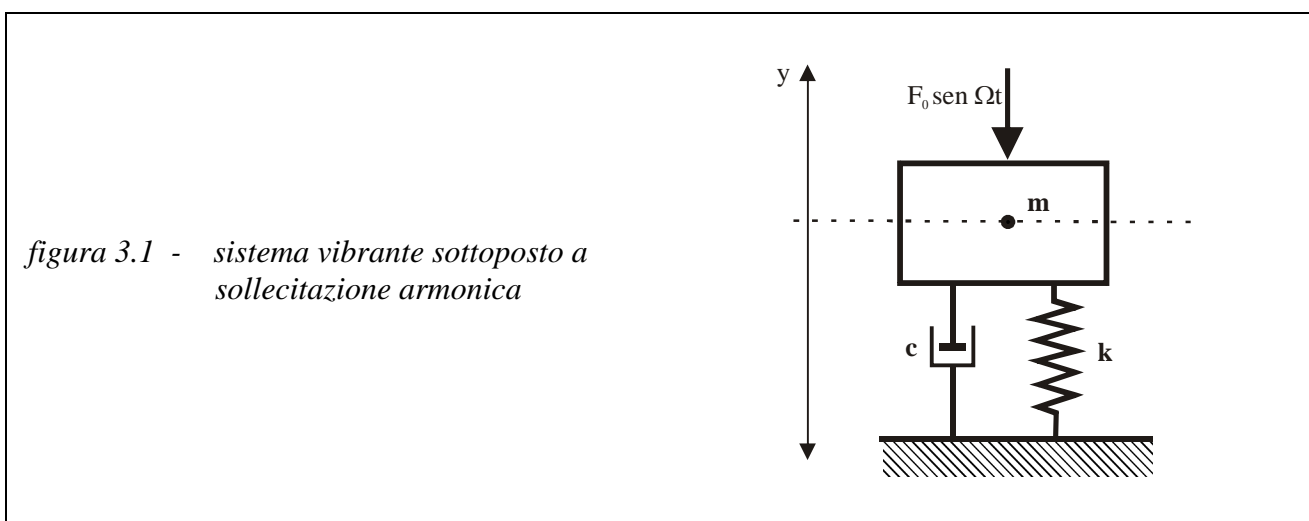
La possibilità che  $z$  sia più grande, uguale o più piccolo dell'unità comporta una sostanziale variazione delle caratteristiche oscillatorie il cui andamento del decremento può essere definito attraverso lo sviluppo analitico dell'equazione del moto.

A livello qualitativo le diverse casistiche sono rappresentate nella figura 2.3, nella quale è sintetizzata, in linea di principio, l'influenza dell'indice di smorzamento nell'attenuazione del moto. In un sistema perfettamente elastico, quindi con indice di smorzamento uguale a zero lo smorzamento è nullo. Con indice di smorzamento minore di 1 si è in presenza di oscillazione smorzata. Con indice di smorzamento superiore ad 1 si è in presenza di moto aperiodico non più oscillatorio con smorzamento esponenziale del moto. Con indice di smorzamento uguale ad 1, detto smorzamento critico, si è in presenza di condizione transitoria tra moto oscillatorio e non oscillatorio.



### 3 Oscillazioni forzate

Nel sistema schematizzato nella figura 3.1, eccitato da una forza armonica  $F_0 \sin \Omega t$ , con frequenza di eccitazione  $\Omega$ , costituito da una massa, una molla, ed uno smorzatore viscoso, l'equazione differenziale del moto è la (3.1).



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \Omega t \quad (3.1)$$

La trattazione matematica consente di determinare il valore istantaneo a regime dell'ampiezza di oscillazione  $y$  e l'angolo di fase  $\Phi$  che risultano:

$$y = \frac{F_0}{\sqrt{c^2 \Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}} \quad (3.2)$$

$$\text{tang } \Phi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \quad (3.3)$$

Si sottolinea che la frequenza dell'oscillazione forzata è quella della forza eccitante e che nella (3.2) non compare in alcun modo la frequenza propria del sistema. Ne deriva che l'oscillazione forzata avviene con la frequenza dell'eccitante indipendentemente dalla frequenza propria del sistema.

Nella pratica è utile determinare il rapporto esistente tra la deformazione massima  $Y$  dovuta all'oscillazione forzata e la deformazione  $Y_0$  correlata alla deformazione statica sotto l'azione della forza  $F_0$  che, come è noto, risulta  $Y_0 = F_0/k$ .

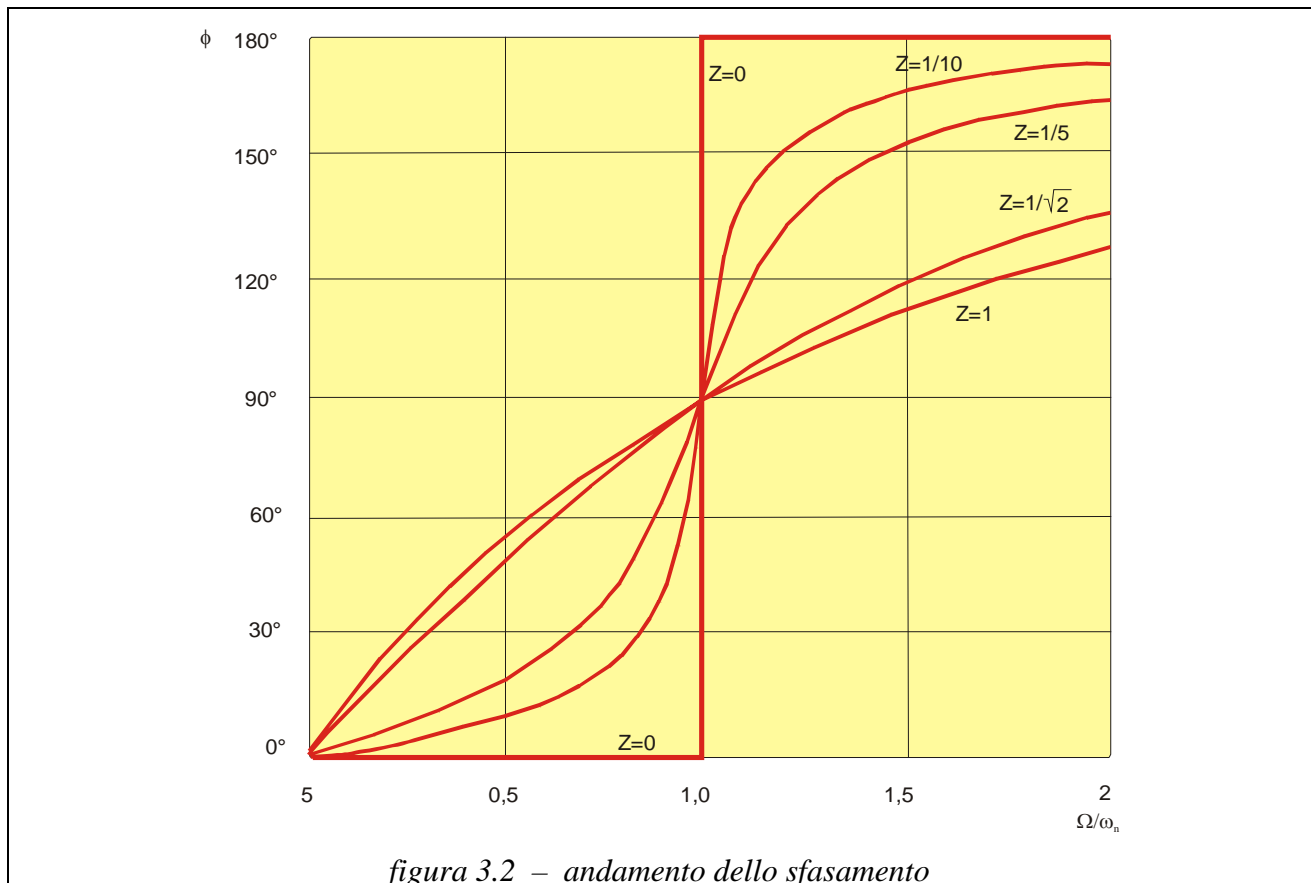
Il termine  $Y/Y_0$  è chiamato fattore di amplificazione e rappresenta il fattore per cui la freccia a frequenza nulla deve essere moltiplicata per determinare l'ampiezza  $Y$ .

Definendo **fattore di risonanza** il rapporto tra la frequenza di eccitazione e la frequenza propria del sistema ( $r = \Omega/\omega_n$ ), e ricorrendo anche all'indice di smorzamento ( $z=c/c_c$ ), le espressioni (3.2) e (3.3), si possono esprimere nelle (3.4) e (3.5).

Si rammenta che si parla di risonanza quando la frequenza di eccitazione e la frequenza propria del sistema coincidono, sicchè si verifica una amplificazione delle oscillazioni, con trasmissione di abnormi forze all'esterno del sistema.

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{1}{\sqrt{4z^2r^2 + (1-r^2)^2}} \quad (3.4)$$

$$\text{tang } \Phi = \frac{2zr}{1-r^2} \quad (3.5)$$



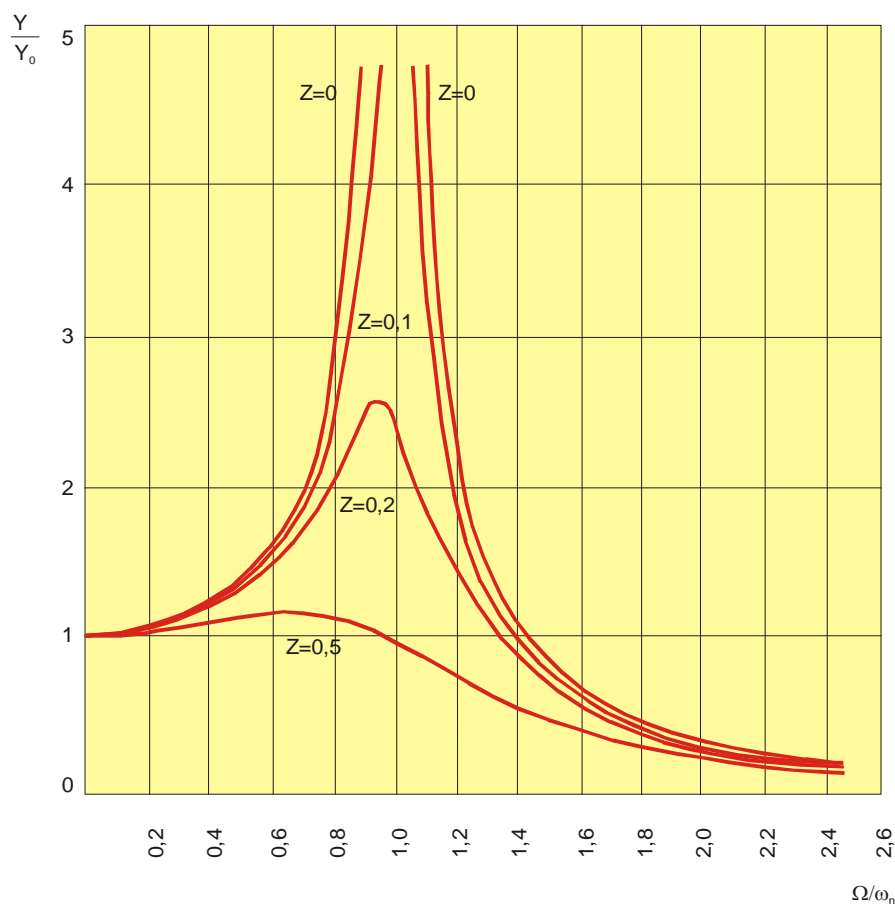


figura 3.3 - andamento del fattore di risonanza

#### 4 Isolamento dalle vibrazioni

Il funzionamento delle macchine produce inevitabili vibrazioni di cui è necessario impedire la propagazione nel basamento e negli elementi circostanti.

L'isolamento della sorgente vibrante dalle strutture circostanti avviene attraverso l'impiego di molle appositamente dimensionate che assumono la funzione di isolatori.

Al fine dell'isolamento degli elementi pulsanti lo studio viene condotto nella direzione di ridurre, quanto più possibile, la trasmissione di forza. A tal proposito si definisce **coefficiente di trasmissibilità** il rapporto tra l'ampiezza della forza trasmessa e l'ampiezza della forza eccitante ( $TR = F/F_0$ ).

Dalle relazioni precedentemente esposte, eseguendo il calcolo, si ricava la (4.1) che per smorzamento trascurabile si riduce nella (4.2):

$$TR = \frac{F}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + 4z^2 r^2}{4z^2 r^2 + (1 - r^2)^2}} \quad (4.1)$$

$$TR = \sqrt{\frac{1}{(1 - r^2)^2}} \quad (4.2)$$



Il relativo andamento grafico è riportato nella figura 4.1

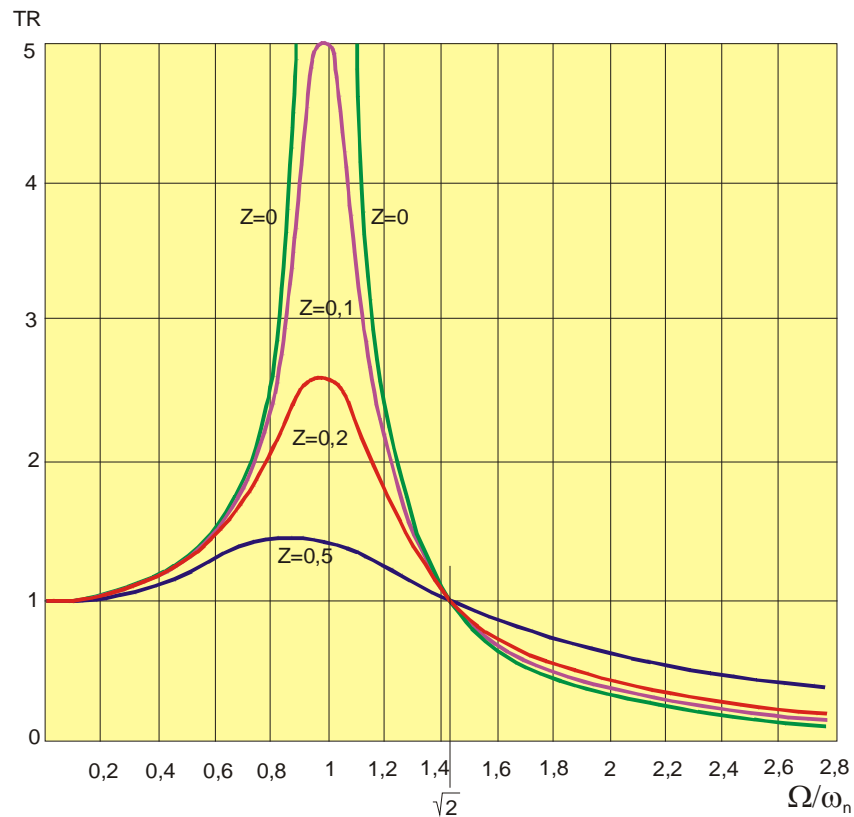


figura 4.1 - coefficiente di trasmissibilità (TR)

Dall'analisi del diagramma della figura 4.1 emerge che la trasmissibilità è minore dell'unità quando il fattore di risonanza è maggiore della radice di due. Ne consegue che l'isolamento delle vibrazioni è garantito quando  $\Omega/\omega_n > 1,41$ . Tuttavia un buon isolamento lo si ottiene con  $\Omega/\omega_n > 3$ .

Il grafico della figura 4.1, oltre a fornire l'andamento della trasmissibilità in funzione del fattore di risonanza, consente di apprezzare l'influenza dell'indice di smorzamento nel fenomeno.

Nella condizione di risonanza, con  $\Omega/\omega_n = 1$ , in presenza di un indice di smorzamento nullo, la trasmissibilità tende all'infinito, sicchè, anziché un isolamento, si ha una esaltazione delle vibrazioni. Lo stesso diagramma consente di comprendere l'importanza di un significativo indice di smorzamento nella circostanza in cui il valore di  $\omega_n$  attraversa la regione di risonanza.

L'isolamento dalle vibrazioni, espresso come riduzione percentuale della vibrazione trasmessa è così definito:

$$R = (1 - TR) \quad (4.3)$$

Il diagramma della figura 4.2 consente di individuare il grado di isolamento, in assenza di smorzamento, in funzione della frequenza eccitante e della frequenza propria della sospensione.

Il diagramma della figura 4.2 consente di individuare agevolmente la fascia corrispondente ad un buon isolamento, che è quella delimitata dai livelli percentuali tra il 70% ed il 90%.

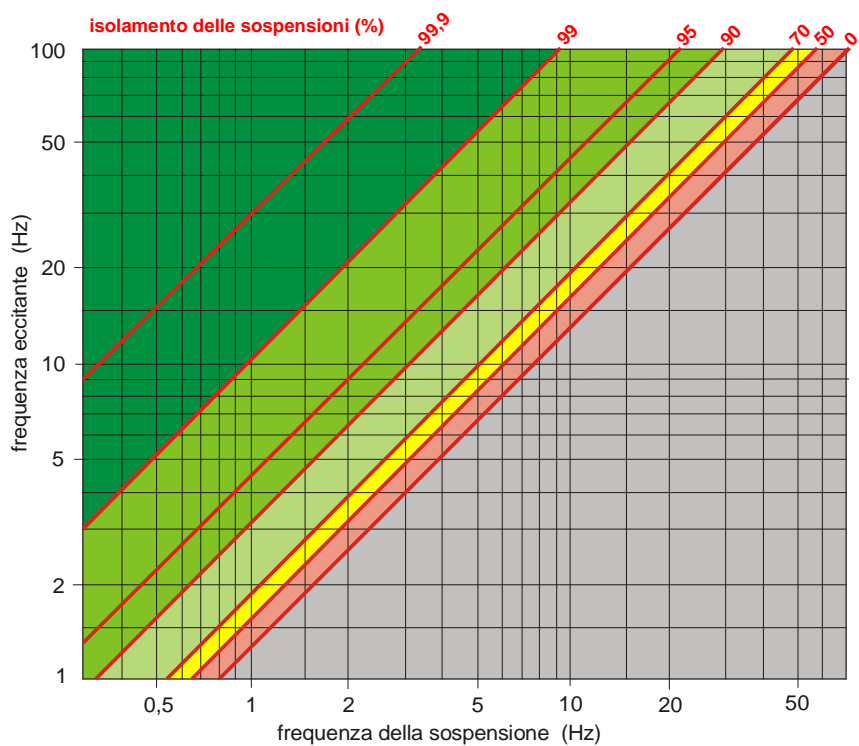


figura 4.2 - grado di isolamento delle sospensioni